РАСЧЕТ СЖАТО–ИЗОГНУТЫХ СОСТАВНЫХ ДЕРЕВЯННЫХ СТОЕК С НЕЛИНЕЙНО–ПОДАТЛИВЫМИ СВЯЗЯМИ СДВИГА

РЕЗЮМЕ

Цель работы: разработка численной методики расчета составных сжато–изгибаемых и внецентренно–сжатых деревянных стоек с податливыми нелинейно–деформируемыми связями сдвига, позволяющая учитывать влияние отклонения упругой оси стержня на приращение изгибающего момента от действия продольной сжимающей силы и нелинейную зависимость между усилиями и деформациями в связях сдвига

Объект исследования - составные деревянные стойки на податливых связях сдвига

Предмет исследования: влияние нелинейной зависимости «нагрузка-сдвиг» при деформации соединителей

Цель исследования: - разработка численной методики расчета, которая учитывала бы увеличение изгибающего момента при внецентренном сжатии и нелинейной деформативности связей

Задача исследования: использование представленной математической модели для расчета двухслойной составной деревянной стойки и сравнить точных и приближенных методик расчетов данной конструкции с использованием различных подходов и числа итераций для уточнения на каждом шаге коэффициента жесткости соединений.

Актуальность применения древесины при строительстве

- архитектурное достоинство
- надежность
- прочность
- долговечность
- легкость
- экономичность
- устойчивость к воздействию агрессивных сред
- наличие возобновляемой сырьевой базы во многих странах

Представлен расчет двухветвевой деревянной сжато–изогнутой стойки с податливыми связями сдвига, выполнено сопоставление результатов линейного и нелинейного расчетов при различном количестве итераций. Установлено оптимальное число итераций, необходимое для получения достоверных искомых параметров напряженно–деформированного состояния.

Ключевые слова:

- нелинейность
- составные колонны
- шаговый метод прочность
- жесткость
- податливость

Выполнили:

Заббарова Е.С. (zabbarova.e@icloud.com)

Шемеляк П.А. (shemelyak89@mail.ru)

Научный руководитель:

Попов Е.В.

Северный (Арктический) Федеральный Университет имени М.В. Ломоносова.

МЕТОДИКА

Основу современных каркасных деревянных зданий составляют двух- и трех-шарнирные рамы, в которых основными вертикальными несущими элементами являются деревянные составные и решетчатые колонны

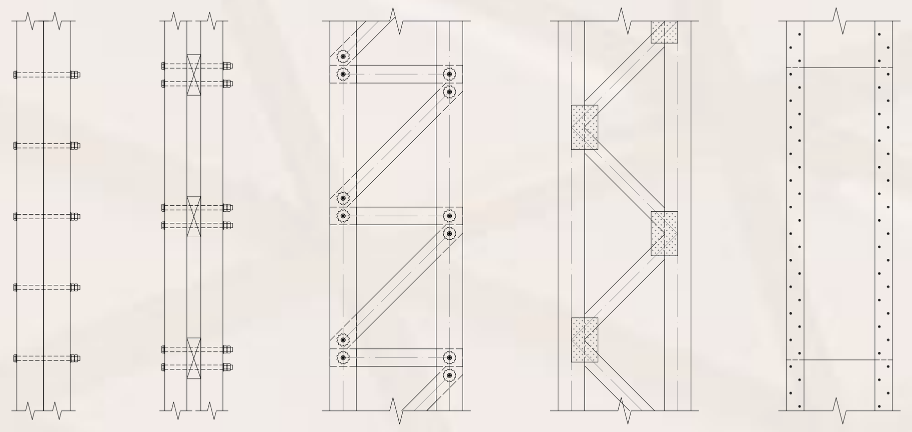


Рисунок 1. Составные деревянные колонны:
а – с соединениями на болтах; *б* – то же, с прокладками;
в – решетчатая колонна с комбинированными соединениями на болтах и когтевых шайбах; *г* – то же, с соединениями на металлозубчатых пластинах (МЗП); *д* – колонна двутаврового сечения со стенкой из OSB

Для большинства типов связей сдвига: нагелей, болтов, мзп, когтевых коннекторов, винтов, скоб и др. – характерна нелинейная зависимость между нагрузкой и деформацией соединения.

Таким образом, для составных колонн с нелинейно–деформируемыми податливыми соединениями необходимо учитывать изменение жесткости в зависимости от усилий, то есть коэффициент жесткости каждой связи нужно рассматривать как функцию :

$$c = c(T_c)$$

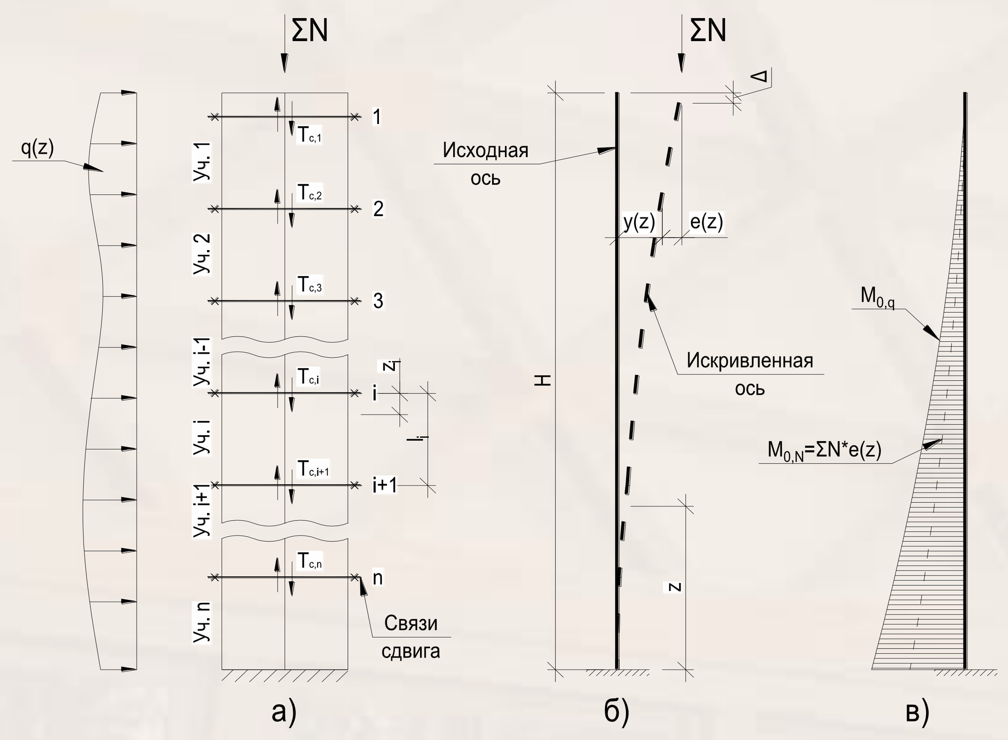


Рисунок 2. Схема сжато–изгибаемого составного элемента с податливыми дискретными связями сдвига:
а – нумерация связей и участков; *б* – схема деформации колонны при совместном действии сжимающей силы и поперечной нагрузки; *в* – эпюры изгибающих моментов $M_{0,q}$ и $M_{0,N}$.

Приращение сосредоточенного сдвига по длине выделенного участка будет равно разнице сдвигов i–ой и i–1–ой связей:

$$\Gamma_i - \Gamma_{i-1} = \frac{T_{c,i}}{c_i} - \frac{T_{c,i-1}}{c_{i-1}} = \gamma\sum_{k=i}^{n} T_k + \int_0^{l_i} \Delta_i(z_i)dz_i$$

c_i – коэффициент жесткости *i*-ой связи; z_i – координата, отсчитываемая по длине *i*–го участка; γ, Δ_i – параметры, определяемые по формулам:

$$\gamma = \frac{1}{E_1F_1} + \frac{1}{E_2F_2} + \frac{w^2}{\Sigma EI}; \qquad \Delta_i(z_i) = \frac{N_2}{E_2F_2} - \frac{N_1}{E_1F_1} - \frac{M_{0,i}(z_i)\cdot w}{\Sigma EI}$$

F_1, F_2, E_1; E_2 – площади поперечного сечения и модули упругости материала ветвей составной колонны; N_1; N_2 – продольные усилия в ветвях; w – расстояние между центрами тяжести ветвей; $\sum EI$ – сумма жесткостей ветвей: $\Sigma EI = E_1I_1 + E_2I_2$; $M_{0,i}(z_i)$ – функция распределения изгибающего момента в пределах *i*–го участка: $M_{0,i} = M_{0,I,q} + M_{0,i,N.}$

Система уравнений для участков стержня ниже/выше сечения с нулевым сосредоточенным сдвигом:

$$\begin{cases}
\dfrac{T_{c,2}}{c_2} - \dfrac{T_{c,1}}{c_1} = \gamma\cdot T_1\cdot l_1 + \int_0^{l_1}\Delta_1(z_1)dz_1 \\
\dfrac{T_{c,3}}{c_3} - \dfrac{T_{c,2}}{c_2} = \gamma\cdot\sum_{k=1}^{2} T_k\cdot l_2 + \int_0^{l_2}\Delta_2(z_2)dz_2 \\
\dots \\
\dfrac{T_{c,i+1}}{c_{i+1}} - \dfrac{T_{c,i}}{c_i} = \gamma\cdot\sum_{k=1}^{i} T_k\cdot l_i + \int_0^{l_i}\Delta_i(z_i)dz_i \\
\dots \\
\dfrac{T_{c,n}}{c_n} - \dfrac{T_{c,n-1}}{c_{n-1}} = \gamma\cdot\sum_{k=1}^{n-1} T_k\cdot l_{n-1} + \int_0^{l_{n-1}}\Delta_{n-1}(z_{n-1})dz_{n-1} \\
-\dfrac{T_{c,n}}{c_n} = \gamma\cdot\sum_{k=1}^{n} T_k\cdot l_n + \int_0^{l_n}\Delta_n(z_n)dz_n
\end{cases}$$

Система уравнений в матричном виде

$$A = \begin{bmatrix}
-\frac{1}{c_1}-\gamma l_1 & \frac{1}{c_2} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
-\gamma l_2 & \frac{1}{c_2}-\gamma l_2 & \frac{1}{c_3} & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-\gamma l_i & -\gamma l_i & -\gamma l_i & \dots & -\frac{1}{c_i}-\gamma l_i & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-\gamma l_n & -\gamma l_n & -\gamma l_n & \dots & -\gamma l_n & \dots & -\frac{1}{c_n}-\gamma l_n
\end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix}
\int_0^{l_1}\Delta_1(z_1)dz_1 \\
\int_0^{l_2}\Delta_2(z_2)dz_2 \\
\dots \\
\int_0^{l_i}\Delta_i(z_i)dz_i \\
\dots \\
\int_0^{l_n}\Delta_n(z_n)dz_n
\end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix}
T_{c,1} \\ T_{c,2} \\ \dots \\ T_{c,i} \\ \dots \\ T_{c,n}
\end{bmatrix}$$

A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных сдвигающих усилиях Tc,i ; B – матрица, составленная из свободных членов (интегралы в правой части уравнений); X – искомая матрица неизвестных сдвигающих усилий Tc;

Численный алгоритм решения задачи:

Поперечная нагрузка q(z) прикладывается ступенями величиной δq, а продольная сжимающая сила на начальном этапе расчета имеет полную величину

На каждом этапе расчета определяются усилия в связях сдвига, напряжения в ветвях и прогиб стержня

Напряжения в ветвях и усилия в связях сдвига суммируются на каждом этапе расчета, по результирующим значениям которых формулируются выводы об обеспечении прочности и жесткости рассматриваемой конструкции.

Уравнение изогнутой оси участка между верхом колонны и связью 1 (участок 0) имеет вид:

$$y_0(z_0) = \frac{1}{\Sigma EI}\iint\left[M_{0,q}^{j}(z_0) + \sum N\cdot e^{j-1}(z_0)\right]dz_0dz_0,$$

Для остальных участков (i=1, 2…n):

$$y_i(z_i) = \frac{1}{\Sigma EI}\iint\left(M_{0,q}^{j}(z_i) + \sum N\cdot e^{j-1}(z_i) + \sum_{k=1}^{i} T_k\cdot w\right)dz_idz_i,$$

Решения уравнений представится в виде:

$$y_i(z_i) = \frac{1}{\Sigma EI}\left(\Phi_i(z_i) + C_iz_i + D_i\right), \qquad (i = 0,\ 1\dots n)$$

$\Phi_i(z_i)$ – функции, являющиеся общим решение неопределенных интегралов выражений; C_i, D_i – произвольные постоянные

Для жестко защемленной в опорном сечении колонны с учетом равенства в нем нулю прогиба и угла:

Система уравнений

$$\begin{cases}
\Phi_0(l_0) + C_0\cdot l_0 + D_0 = \Phi_1(0) + D_1 \\
\Phi_0'(l_0) + C_0 = \Phi_1'(0) + C_1 \\
\Phi_1(l_1) + C_1\cdot l_1 + D_1 = \Phi_2(0) + D_2 \\
\Phi_1'(l_1) + C_1 = \Phi_2'(0) + C_2 \\
\dots \\
\Phi_{n-1}(l_{n-1}) + C_{n-1}\cdot l_{n-1} + D_{n-1} = \Phi_n(0) + D_n \\
\Phi_{n-1}'(l_{n-1}) + C_{n-1} = \Phi_n'(0) + C_n \\
\Phi_n(l_n) + C_n\cdot l_n + D_n = 0 \\
\Phi_n'(l_n) + C_n = 0
\end{cases}$$

Система уравнений в матричном виде

$$A = \begin{bmatrix}
l_0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & l_1 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \dots & & \dots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & l_{n-1} & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & l_n & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix}
\Phi_1(0) - \Phi_0(l_0) \\
\Phi_1'(0) - \Phi_0'(l_0) \\
\Phi_2(0) - \Phi_1(l_1) \\
\Phi_2'(0) - \Phi_1'(l_1) \\
\dots \\
\Phi_n(0) - \dots \\
\Phi_n'(0) - \dots \\
-\Phi_n(0) \\
-\Phi_n'(l_n)
\end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix}
C_0 \\ C_1 \\ D_0 \\ D_1 \\ \dots \\ C_{n-1} \\ D_{n-1} \\ C_n \\ D_n
\end{bmatrix}$$

ПРИМЕР

Составная деревянная колонна поперечной рамы одноэтажного здания с деревянным каркасом из древесины сосны класса прочности C22.

Ветви составной колонны соединены между собой стальными болтовыми соединениями и зубчатыми коннекторами.

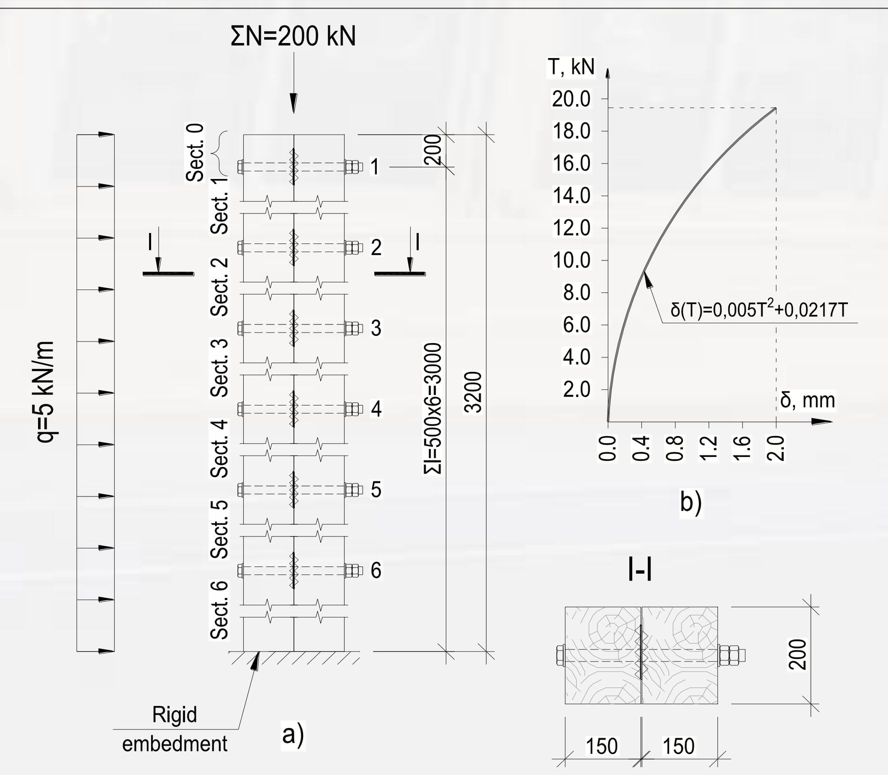


Рисунок 3. К расчету составной колонны на податливых связях:
а – схема колонны; *б* – диаграмма «нагрузка–деформация» (*T*–δ) для одиночной болтовой связи при действии продольного сдвига

Аппроксимирующие функции прогибов

$$\overline{y}_i(z_i) = a_jz_i^3 + b_jz_i^3 + c_jz_i; \qquad (i = 0,\ 1\dots 6)$$

где a_j, b_j, c_j – коэффициенты полинома, вычисляемые *j*–ом этапе расчета

Функция эксцентриситетов ej, на j–ом этапе расчета

$$e_i^j(z_i) = \overline{y}_0(0) - \overline{y}_i(z_i)$$

Коэффициенты жесткости

$$c_i^j(T_i^{j-1}) = \frac{1}{\mathrm{d}\delta_i\left(\sum_{k=1}^{j-1} T_{i,k}\right)/\mathrm{d}T}.$$

где $\sum_{k=1}^{j-1} T_{i,k}$ – сумма свигающих усилий в *i*–ой связи, полученных на предшествующих *j*–му этапах расчета;

$\delta_i(T)$ – дефорация *i*–ой связи при заданной нагрузке, определяемая по аппроксимирующей кривой графика деформирования соединения

Краевые нормальные напряжения

$$\sigma_x = \frac{\sum N\cdot F_1}{F_1 + F_2} + \sum_{j=1}^{m}\sigma_{x,M}^{j}$$

где $\sigma_{x,M}^{j}$ – краевые нормальные напряжения на *j*–ом этапе расчета, полученные без учета действия продольной сжимающей силы ∑*N* (учитываемой только при вычислении изгибающего момента), определяемые для 1 и 2 ветви, соответственно, по формулам:

$$\sigma_{x,M}^{j} = \pm\frac{F_1\sum_{k=1}^{i} T_k}{F_1 + F_2} \pm \frac{\left(M_0^j - w\sum_{k=1}^{i} T_k\right)I_1\frac{h_1}{2}}{I_1 + I_2}; \quad \sigma_{x,M}^{j} = \pm\frac{F_2\sum_{k=1}^{i} T_k}{F_1 + F_2} \pm \frac{\left(M_0^j - w\sum_{k=1}^{i} T_k\right)I_2\frac{h_2}{2}}{I_1 + I_2}$$

где $\sum_{k=1}^{i} T_k^j$ – сумма усилий в связях сдвига выше рассматриваемого сечения, вычисленная на *j*–ом этапе расчета;

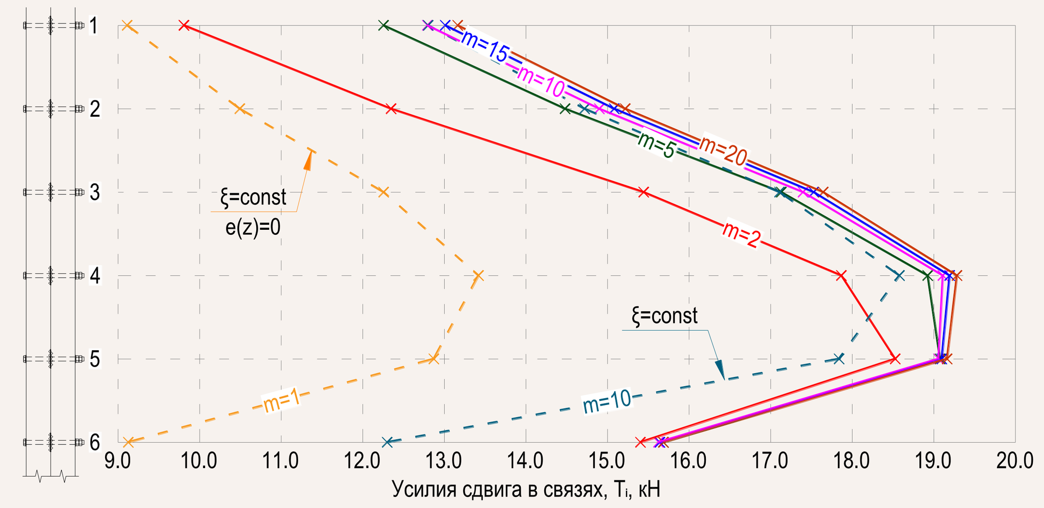
M_0^j - изгибающий момент, получаемый в рассматриваемом сечении на *j*–ом этапе расчета без учета сдвигающих усилий в связях; h_1, h_2, F_1, F_2, I_1, I_2 – высота сечения, площади поперечного сечения и моменты инерции 1–ой и 2–ой ветви, соответственно

Нормативное значение линейного коэффициента жесткости соединения согласно Еврокоду определяется

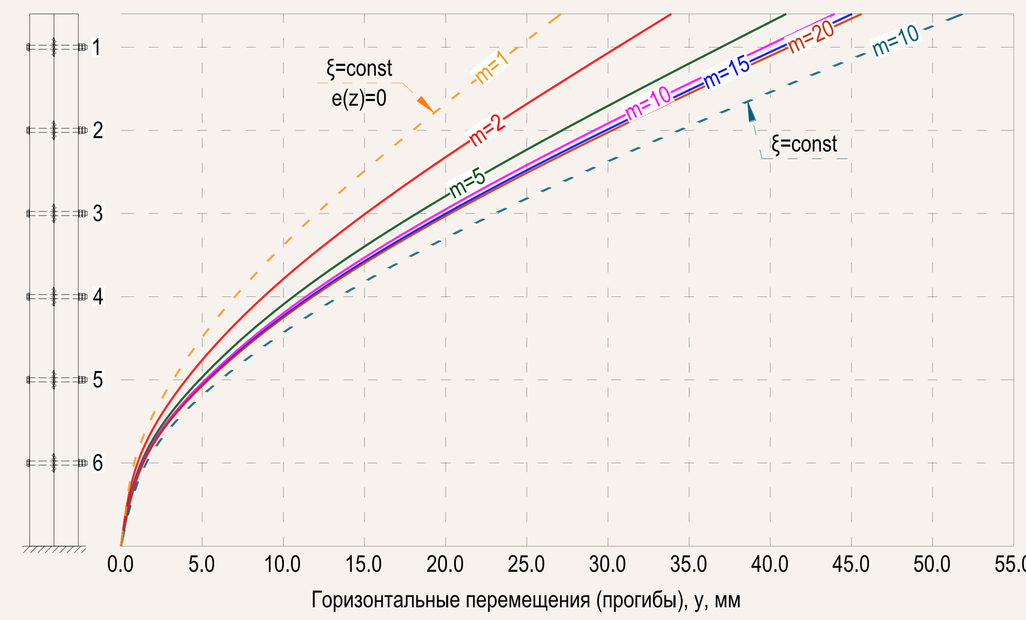
$$k_u = \frac{2}{3}k_{ser},$$

где k_{ser} – нормативный коэффициент жесткости соединения, определяемый как секущий модуль при нагрузке, равной 40% от предельно–допустимого значения

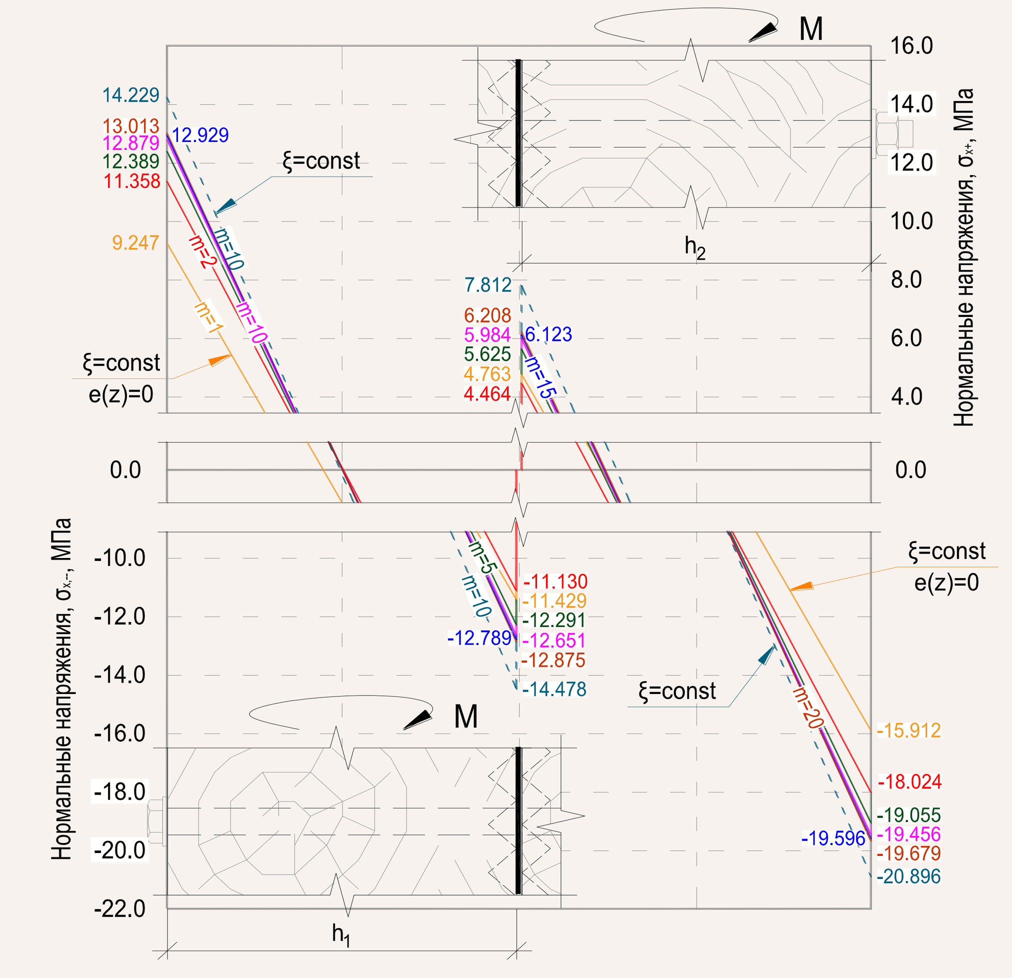
РЕЗУЛЬТАТЫ



Усилия в связях сдвига T_i при различном числе итераций m



Графики отклонения упругой оси колонны $y(z)$ при продольно–поперечном изгибе



Эпюры нормальных напряжений σ_x в ветвях составной колонны

- Получены формулы для вычисления сдвигающий усилий в связях, горизонтальных перемещений упругой оси и краевых нормальных напряжений
- Произведен расчет консольной двухветвевой сжато–изогнутой деревянной колонны при различном количестве итераций, а также в линейной постановке
- Для достоверной оценки напряженно–деформированного состояния таких конструкций следует принимать количество итераций m=10.